## OHIKO DEIALDIKO AZTERKETA (1. eta 2. partzialak)

| Ariketa 1 | Ariketa 2 | Ariketa 3 | Ariketa 4 | Ariketa 5 | Ariketa 6 | Ariketa 7 | Ariketa 8 | Guztira |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

Iraupena: 2 ordu

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN ABIZENAK:

TALDEA:

**1.- Kalkulatu hurrengo limiteak:**

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{2n}$

**b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)\cdot(an+1)^n}{(n+2)^{n+1}}$**,** $\forall a>0$

**(2 puntu)**

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{2n}\overset{\text{(STOLZ)}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2n-(2n-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2}\overset{\text{(Z-E)}}{=}\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=\frac{1}{2}$$

$\{2n\}$ hertsiki gorakorra eta dibergentea da, beraz Stolz erabil daiteke.

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)\cdot(an+1)^n}{(n+2)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)\cdot(an+1)^n}{(n+2)\cdot(n+2)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an+1}{n+2}\right)^n=a^{\infty}=\begin{cases}\infty & \forall a>1\\ 0 & \forall a<1\\ 1^{\infty} & a=1\end{cases}$$

Baldin $a=1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n=1^{\infty}=A \;\Leftrightarrow\; \mathrm{L}A=\lim\limits_{n\to\infty}n\mathrm{L}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{n+1}{n+2}-1\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{n+1-n-2}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+2}=-1 \;\Leftrightarrow\; A=e^{-1}$$

**2.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \mathrm{L}\left(1+\frac{1}{a^n}\right)$ seriearen izaera, $\forall a > 0$.**

**(1.5 puntu)**

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \forall a>1 \\ 0 & \forall a<1 \\ 1 & a=1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = \begin{cases} 0 & \forall a>1 \\ \infty & \forall a<1 \\ 1 & a=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \mathrm{L}\left(1+\frac{1}{a^n}\right) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{a^n} \overset{(n^2 \ll a^n)}{=} 0 & \forall a>1 \\ \infty & \forall a<1 \\ \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \mathrm{L}(2) = \infty & a=1 \end{cases}$$

Beraz, $\forall a \le 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da, konbergentziarako BB betetzen ez baita.

Eta, $\forall a > 1$, D'Alambert aplikatzen dugu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{a^{n+1}}}{\frac{n^2}{a^n}} = \frac{1}{a} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da.}$$

**3.- a) Aurkitu $f(x)=\mathrm{L}\left(4-x^2\right)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.**

**b) Lortu $f^{20)}(0)$ -ren balioa.**

**(2.5 puntu)**

a) $f'(x)=\dfrac{-2x}{4-x^2}=\dfrac{-\dfrac{x}{2}}{1-\dfrac{x^2}{4}}\overset{(*)}{=}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{4}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}}\quad \forall x\in(-2,2)$

(*) $r=\dfrac{x^2}{4}$ arrazokio serie geometrikoaren batura, beraz konbergente da

$$\Leftrightarrow\quad |r|=\frac{x^2}{4}<1\quad\Leftrightarrow\quad x^2<4\quad\Leftrightarrow\quad |x|<2$$

Integratuz:

$$f(x)=\mathrm{L}\left(4-x^2\right)\overset{(f(0)=\mathrm{L}4)}{=}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2^{2n+1}\cdot(2n+2)}+\mathrm{L}4\quad\forall x\in(-2,2)$$

Eta, $x=\pm 2$ puntuetan, $\nexists f$

b) Lortutako garapena *f*-ri dagokion Taylor-ren seriea denez:

$$\frac{f^{2n+2)}(0)}{(2n+2)!}\cdot x^{2n+2}=-\frac{x^{2n+2}}{2^{2n+1}\cdot(2n+2)}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{f^{2n+2)}(0)}{(2n+2)!}=-\frac{1}{2^{2n+1}\cdot(2n+2)}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad f^{2n+2)}(0)=-\frac{(2n+2)!}{2^{2n+1}\cdot(2n+2)}=-\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}}$$

Eta, $n=9\quad\Rightarrow\quad f^{20)}(0)=-\dfrac{(19)!}{2^{19}}$

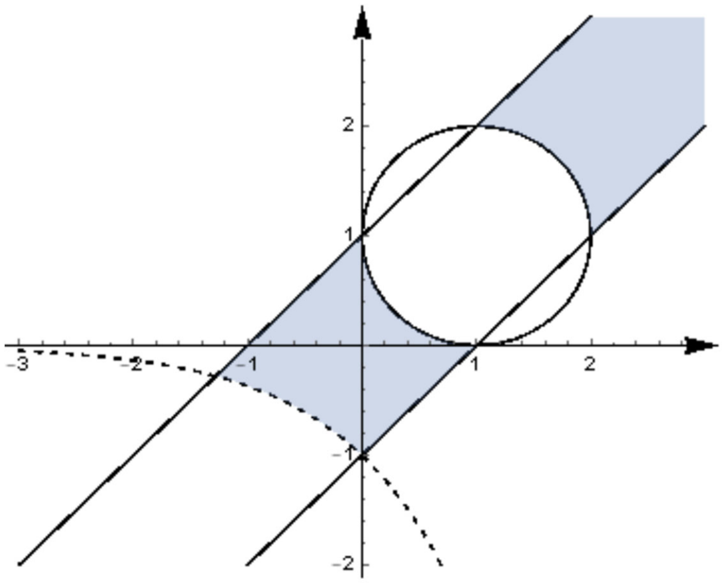
**4.- Lortu, analitiko eta grafikoki, hurrengo funtzioaren definizio-eremua:**

$$f(x,y)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2-1}+\arcsin(x-y)+\mathrm{L}\left(y+e^x\right)$$

**(1.5 puntu)**

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\,/\,(x-1)^2+(y-1)^2-1\geq 0,-1\leq x-y\leq 1,\ y+e^x>0\right\}$$

- $(x-1)^2+(y-1)^2-1\geq 0 \iff (x-1)^2+(y-1)^2\geq 1$ ((1,1) puntuan zentroa eta 1 erradioko zirkunferentziaren kanpotik dagoena, zirkunferentzia barne).
- $-1\leq x-y\leq 1 \iff x-1\leq y\leq x+1$ ( $y=x-1$ eta $y=x+1$ zuzenen artean dagoena, zuzen biak barne)
- $y+e^x>0 \iff y>-e^x$ ( $y=-e^x$ kurbaren gainetik dagoena).



**5.-** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{L}\left(1+x^3\right)}{x^2+y^2} & \forall (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik, aztertu bere deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.**

**(2 puntu)**

*f* deribagarria da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \exists \left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)} \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u}$ unitarioa

$\forall \vec{u}=\left(h_1,h_2\right)$ unitarioa:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left(\lambda h_1,\lambda h_2\right)-f(0,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\dfrac{\mathrm{L}\left(1+\lambda^3 h_1^3\right)}{\lambda^2}}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda^3 h_1^3}{\lambda^3}=h_1^3\in\mathbb{R}$$

Beraz, *f* deribagarria da (0,0) puntuan.

Diferentziagarria denetz aztertzekok, BBN aplikatzen dugu:

*f* diferentziagarria da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Eta, badakigu $\begin{cases}\vec{u}=\left(1,0\right) \Rightarrow \left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=1=f'_x(0,0)\\ \vec{u}=\left(0,1\right) \Rightarrow \left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=0=f'_y(0,0)\end{cases}$

Orduan:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\dfrac{\mathrm{L}\left(1+h^3\right)}{h^2+k^2}-h}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(*)}{=}$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\dfrac{\mathrm{L}\left(1+\rho^3\cdot\cos^3\theta\right)}{\rho^2}-\rho\cdot\cos\theta}{\rho}=\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\mathrm{L}\left(1+\rho^3\cdot\cos^3\theta\right)-\rho^3\cdot\cos\theta}{\rho^3}=$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\mathrm{L}\left(1+\rho^3\cdot\cos^3\theta\right)}{\rho^3}-\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^3\cdot\cos\theta}{\rho^3}=\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^3\cdot\cos^3\theta}{\rho^3}-\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^3\cdot\cos\theta}{\rho^3}=$$

$$=\cos^3\theta-\cos\theta\neq 0$$

Beraz, *f* ez da diferenciagarria (0,0) puntuan.

(*) Polarretan: $\begin{cases}x=\rho\cdot\cos\theta\\ y=\rho\cdot\sin\theta\end{cases}$

**6.- Kalkulatu *a* eta *b* balioak $f(x,y)=e^{xy}\cdot\sin(ax-by)$ funtzioaren aldakuntzaren abiadura maximoa (0,0) puntuan 5 izan dadin, eta, $y=2x$ zuzenaren norabidean lor dadin.**

**(1.5 puntu)**

$f$ funtzio diferentziagarria denez, aldakuntzaren abiadura maximoa gradientearen modulua da, eta bektore horren norabidean lortzen da:

$$\overrightarrow{\nabla f}(0,0)=\left(f'_x(0,0),f'_y(0,0)\right)$$

$f'_x(x,y)=ye^{xy}\cdot\sin(ax-by)+ae^{xy}\cdot\cos(ax-by) \quad\Rightarrow\quad f'_x(0,0)=a$

$f'_y(x,y)=xe^{xy}\cdot\sin(ax-by)-be^{xy}\cdot\cos(ax-by) \quad\Rightarrow\quad f'_y(0,0)=-b$

Beraz, $\overrightarrow{\nabla f}(0,0)=\left(a,-b\right) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=5\\ b=-2a\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{5a^2}=5 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{5}|a|=5 \quad\Leftrightarrow\quad |a|=\sqrt{5}$

Baldin eta $a=\sqrt{5} \quad\Rightarrow\quad b=-2\sqrt{5}$

Baldin eta $a=-\sqrt{5} \quad\Rightarrow\quad b=2\sqrt{5}$

**7.- a) Frogatu** $\begin{cases} F(x,y,z)=x^2-2y^2+\mathrm{L}(xyz)+1=0 \\ G(x,y,z)=y^2-\sqrt{x}+\mathrm{L}(xyz)=0 \end{cases}$ **ekuazio-sistemak** $\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$ **funtzio diferentziagarriak definitzen dituela** $P=(1,1,1)$ **puntuaren ingurune batean.**

**b) Defini dezagun orain** $h(x)=Ax^2+y(x)+z(x)$ **funtzioa. Kalkulatu** $A$ **parametroak izan behar duen balioa, funtzio honek puntu kritikoa euki dezan** $x=1$ **puntuan.**

**(2.5 puntu)**

a) Funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen dela egiaztatuko dugu:

i. $\begin{cases} F(P)=0 \\ G(P)=0 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} F'_x=2x+\dfrac{1}{x} & F'_y=-4y+\dfrac{1}{y} & F'_z=\dfrac{1}{z} \\ G'_x=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x} & G'_y=2y+\dfrac{1}{y} & G'_z=\dfrac{1}{z} \end{cases}$ jarraituak $P$-ren ingurune batean (non $x>0,\ y>0,\ z>0$).

iii. $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}\right|_P=\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_P=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-6\neq 0$

Beraz, $P$-ren ingurunean $\exists!\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$ diferentziagarriak, non $\begin{cases} F(x,y(x),z(x))=0 \\ G(x,y(x),z(x))=0 \end{cases}$ eta $\begin{cases} y(1)=1 \\ z(1)=1 \end{cases}$.

b) $h(x)=Ax^2+y(x)+z(x)$ funtzioak puntu kritikoa du $x=1$ puntuan $\Leftrightarrow h'(1)=0$

$\begin{cases} F(x,y(x),z(x))=0 \\ G(x,y(x),z(x))=0 \end{cases}$ sisteman $x$–rekiko deribatzen eta $P$ puntuan ordezkatzen dugu:

$$\begin{cases} F'_x+F'_y\cdot y'+F'_z\cdot z'=0 \\ G'_x+G'_y\cdot y'+G'_z\cdot z'=0 \end{cases} \overset{P\text{ puntuan}}{\Rightarrow} \begin{cases} 3-3y'(1)+z'(1)=0 \\ \dfrac{1}{2}+3y'(1)+z'(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Batuz: } \dfrac{7}{2}+2z'(1)=0 \\ \text{Kenduz: } \dfrac{5}{2}-6y'(1)=0 \end{cases}$$

Beraz, $\begin{cases} y'(1)=\dfrac{5}{12} \\ z'(1)=-\dfrac{7}{4} \end{cases}$ eta:

$$h'(x)=2Ax+y'(x)+z'(x) \quad\Rightarrow\quad h'(1)=2A+\frac{5}{12}-\frac{7}{4}=2A-\frac{4}{3}=0 \quad\Leftrightarrow\quad A=\frac{2}{3}$$

**8.- Aurkitu** $C \equiv \begin{cases} z = x^2 + y^2 + 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$ **kurba itxitik** $z = 0$ **planora dauden distantzia maximoa eta minimoa.**

**(1.5 puntu)**

$C$ kurbatik $z = 0$ planora dagoen distantzia $f(x, y, z) = |z| \quad \forall (x, y, z) \in C$

Eta, $C$ kurba $z = 0$ planoaren gainean dagoenez ($z = x^2 + y^2 + 1 > 0$), orduan $f(x, y, z) = |z| = z$.

Lortuko ditugun puntuak $C$ kurban egongo dira, beraz mutur erlatibo baldintzatuak izango dira baina, horrez gain, kurba hori multzo itxi eta mugatua denez, Weiertrass-en teoremak ziurtatzen digu multzo horretan $f$ funtzio jarraituak mutur absolutuak dituela beraz, distantzia maximoa eta minimoa kalkulatzen ari garela esan dezakegu.

Puntu kritikoak Lagrange-ren biderkatzaileen metodoaren bitartez kalkulatuko ditugu:

$$w(x, y, z) = z + \lambda\left(x^2 + y^2 + 1 - z\right) + \mu\left(x^2 + y^2 - 2x - 2y\right)$$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} w'_x = 2\lambda x + \mu(2x - 2) = 0 \\ w'_y = 2\lambda y + \mu(2y - 2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mu = \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{y}{1-y} \Leftrightarrow y = x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow z = 9 \end{cases} \\ w'_z = 1 - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \\ z = x^2 + y^2 + 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Beraz, distantzia minimoa 1 da, eta (0,0,1) puntutik lortzen da, eta distantzia maximoa 9 da, eta (2,2,9) puntutik lortzen da.

**OHIKO DEIALDIKO AZTERKETA (3. partziala)**

| Ariketa 1 | Ariketa 2 | Ariketa 3 | Ariketa 4 | Guztira |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

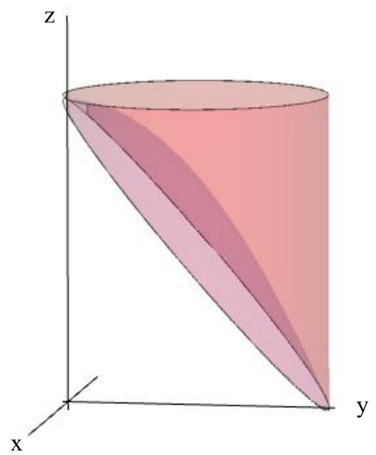
Iraupena: Ordu bat eta erdi

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

**1.-** $\begin{cases} S_1 \equiv 4 - z = x^2 + y^2 \\ S_2 \equiv x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ S_3 \equiv z = 4 \end{cases}$ **gainazalek irudian erakusten den *V* solidoaren muga osatzen dute, *S* gainazal itxia, hain zuzen ere.**




**a) Kalkulatu *V* solidoaren bolumena.**

**b)** $T(x,y,z) = 3x^2 + (y-1)^2 + 16z^2$ **funtzio eskalarrak *V* solidoan dagoen tenperatura adierazten du.** $\vec{F} = -\overrightarrow{\nabla T}$ **eremu bektorialak, berriz, *S* zeharkatzen duen bero-fluxuaren dentsitatea ematen du. Kalkulatu *S* gainazaletik irteten den** $\vec{F}$**-ren fluxua.**

**c) Kalkulatu** $\vec{F}$**-ren zirkulazioa** $S_2$ **eta** $S_3$ **gainazalen arteko *C* ebakidura-kurban zehar.**

**(3 puntu)**

a) $V$-ren bolumena $= \iiint_V dxdydz$ non $V \equiv \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \\ 4 - \left(x^2 + y^2\right) \leq z \leq 4 \end{cases}$

Zilindrikoetan, bi eratan egingo dugu:

Lehenengo aukera:

$$\boxed{\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=1+\rho\sin\theta \quad |J|=\rho \\ z=z \end{cases}} \Rightarrow V\equiv\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 1 \\ 4-\left(\rho^2\cdot\cos^2\theta+1+\rho^2\cdot\sin^2\theta+2\rho\sin\theta\right)\le z\le 4 \end{cases}$$

$$\equiv\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 1 \\ 3-\rho^2-2\rho\sin\theta\le z\le 4 \end{cases} \Rightarrow \iiint_V dxdydz=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{3-\rho^2-2\rho\sin\theta}^{4}\rho\,dz\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\rho\left(4-3+\rho^2+2\rho\sin\theta\right)d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\rho\left(1+\rho^2+2\rho\sin\theta\right)d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\sin\theta\right)d\theta=\left(\frac{3\theta}{4}-\frac{2}{3}\cos\theta\right)_0^{2\pi}=\frac{3\pi}{2}$$

Bigarren aukera:

$$\boxed{\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \quad |J|=\rho \\ z=z \end{cases}} \Rightarrow V\equiv\begin{cases} 0\le\theta\le\pi \\ 0\le\rho\le 2\sin\theta \\ 4-\rho^2\le z\le 4 \end{cases} \Rightarrow \iiint_V dxdydz=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_{4-\rho^2}^{4}\rho\,dz\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\rho\left(4-4+\rho^2\right)d\rho\,d\theta=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\rho^3\,d\rho\,d\theta=\int_0^{\pi}\frac{16\sin^4\theta}{4}\,d\theta=4\int_0^{\pi}\left(\frac{(1-\cos(2\theta))}{2}\right)^2 d\theta=$$

$$=\int_0^{\pi}(1-2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta))\,d\theta=\int_0^{\pi}\left(1-2\cos(2\theta)+\frac{1+\cos(4\theta)}{2}\right)d\theta=$$

$$=\left(\theta-\sin(2\theta)+\frac{\theta}{2}+\frac{\sin(4\theta)}{8}\right)_0^{\pi}=\frac{3\pi}{2}$$

KONTUZ: Kasu honetan, $z\rho\theta$ integrazio-ordena beharrean $\rho z\theta$ integrazio-ordena erabiltzen badugu:

$$\begin{cases} \text{zilindroa: } \rho=2\sin\theta \\ \text{paraboloidea: } 4-\rho^2=z \end{cases} \Rightarrow 4-\left(2\sin\theta\right)^2=z \Leftrightarrow 4-4\sin^2\theta=z \Leftrightarrow z=4\cos^2\theta$$

$$\text{Beraz, } V\equiv\begin{cases} 0\le\theta\le\pi \\ 4\cos^2\theta\le z\le 4 \\ \sqrt{4-z}\le\rho\le 2\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \iiint_V dxdydz=\int_0^{\pi}\int_{4\cos^2\theta}^{4}\int_{\sqrt{4-z}}^{2\sin\theta}\rho\,d\rho\,dz\,d\theta=$$

$$=\int_0^{\pi}\int_{4\cos^2\theta}^{4}\left(2\sin^2\theta-\frac{4-z}{2}\right)dz\,d\theta=\int_0^{\pi}\left(2\sin^2\theta\cdot z+\frac{(4-z)^2}{4}\right)_{4\cos^2\theta}^{4}d\theta=$$

$$=\int_0^{\pi}\left(8\sin^2\theta-8\sin^2\theta\cos^2\theta-\frac{(4-4\cos^2\theta)^2}{4}\right)d\theta=\int_0^{\pi}\left(8\sin^4\theta-4\sin^4\theta\right)d\theta=\int_0^{\pi}4\sin^4\theta\,d\theta$$

b) $S$ gainazaletik irteten den $\vec{F}$-ren fluxua $=\iint_S \vec{F}d\vec{S}$

$S$, gainazal itxia, $V$ solidoaren muga da. Eta, $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak direnez, Gauss-en teorema erabil daiteke:

$$\iint_S \vec{F}d\vec{S} = \iiint_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz \overset{(*)}{=} -40\iiint_V dxdydz = -40\cdot bolumena(V) = -60\pi$$

(*) $\vec{F} = -\overrightarrow{\nabla T} = \left(-6x, -2(y-1), -32z\right) \;\Rightarrow\; div\left(\vec{F}\right) = -6-2-32 = -40$

c) $\vec{F}$-ren zirkulazioa $C$ kurban zehar $=\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\oint_C \overrightarrow{\nabla T}\cdot d\vec{r}$

Era desberdinetan egin daiteke:

<u>Lehenengo aukera</u>:

$\vec{F}$ gradiente bat denez, integrala bidearekiko independentea da. Eta, $C$ kurba itxia denez:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\oint_C \overrightarrow{\nabla T}\cdot d\vec{r} = 0$$

<u>Bigarren aukera</u>:

Stokes-en teorema erabiltzeko baldintzak egiaztatzen dira, beraz:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)d\vec{S} \overset{\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=\vec{0}\right)}{=} 0$$

Izan ere, $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=\vec{0}$ izanik, bidearekiko independentea dela frogatu dugu berriro.

<u>Hirugarren aukera</u>:

Integrala kalkulatuz, $C$ kurbaren parametrizazio naturala erabiliz:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \left(\vec{F}\cdot\vec{r}\,'(t)\right)dt = \oint_C \left(-6xdx - 2(y-1)dy - 32zdz\right)$$

non $C \equiv \begin{cases} x^2+(y-1)^2 = 1 \\ z = 4 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; C = \vec{r}(t) \equiv \begin{cases} x = \cos t \\ y = 1+\sin t \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z = 4 \end{cases}$

Orduan:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(6\cos t\sin t - 2\sin t\cos t\right)dt = \int_0^{2\pi} 4\cos t\sin t dt = 2\sin^2 t\Big|_0^{2\pi} = 0$$

**2.- a) Kalkulatu $z=1$ eta $z=2$ planoen artean mugaturiko $x^2+y^2+z^2=9$ gainazalaren zatiaren azalera.**

**b) Kalkulatu $\vec{F}(x,y,z)=(y,x,z)$ bektorearen lerro-integrala $x^2+y^2+z^2=9$ eta $z=1$ gainazalen arteko ebakidura-kurban zehar, $A=(2,2,1)$ puntutik $B=(-2,2,1)$ puntura, noranzko positiboan ibilita.**

**(2 puntu)**

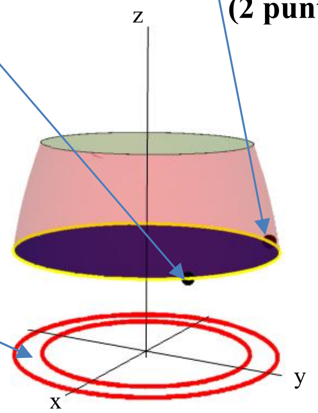
a) $S$-ren azalera $=\iint\limits_S dS=\iint\limits_{R_{xy}}\left|\vec{N}\right|dxdy$

non

$$S\equiv z=\sqrt{9-x^2-y^2}\quad \forall(x,y)\in R_{xy}\equiv 5\le x^2+y^2\le 8$$

$$\vec{N}=\left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}},1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left|\vec{N}\right|=\frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$




Polarretan: $\begin{cases}x=\rho\cdot\cos\theta\\ y=\rho\cdot\sin\theta\end{cases}\quad |J|=\rho\quad\Rightarrow\quad R_{xy}\equiv\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ \sqrt{5}\le\rho\le\sqrt{8}\end{cases}$

Beraz,

$$\iint\limits_S dS=\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}}\frac{3\rho}{\sqrt{9-\rho^2}}d\rho\, d\theta=\int_0^{2\pi}\left[-3\sqrt{9-\rho^2}\right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}}d\theta=2\pi\left(-3+6\right)=6\pi$$

b) $\int\limits_C \vec{F}d\vec{r}=\int\limits_C\left(ydx+xdy+zdz\right)$ kalkulatu behar dugu, $A=(2,2,1)$ tik $B=(-2,2,1)$ ra

non $C\equiv\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ z=1\end{cases}\equiv\begin{cases}x^2+y^2=8\\ z=1\end{cases}$ (marrazkian, kurba horia).

Bi eratan egingo dugu.

<u>Lehenengo aukera</u>:

$C$ kurbaren parametrizazio naturala erabiliz:

$$C\equiv\begin{cases}x=\sqrt{8}\cos t\\ y=\sqrt{8}\sin t\\ z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=(2,2,1)\quad\Leftrightarrow\quad \cos t=\sin t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\quad\Leftrightarrow\quad t=\dfrac{\pi}{4}\\ B=(-2,2,1)\quad\Leftrightarrow\quad -\cos t=\sin t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\quad\Leftrightarrow\quad t=\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\pi}{4}\le t\le\frac{3\pi}{4}\quad\text{eta}\quad\begin{cases}dx=-\sqrt{8}\sin t dt\\ dy=\sqrt{8}\cos t dt\\ dz=0\end{cases}\Rightarrow$$

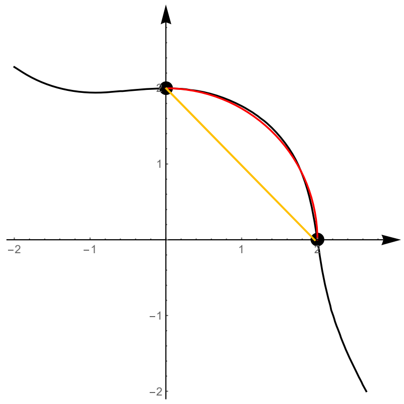
$$\int\limits_C\vec{F}d\vec{r}=\int\limits_C\left(ydx+xdy+zdz\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(-8\sin^2 t+8\cos^2 t\right)dt=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos(2t)dt=4\sin(2t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=-8$$

Bigarren aukera:

$\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ osoan, eremu sinpleki konexua, eta $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=\vec{0}$, beraz $\int_C \vec{F}d\vec{r}$ bidearekiko independentea da. Orduan, $\int_C \vec{F}d\vec{r}$ beste bide batetik kalkula dezakegu. Izan bedi, adibidez, $\begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$ zuzena, non $x$ 2tik, -2ra doan:

$$\int_C \vec{F}d\vec{r}=\int_C \left(ydx+xdy+zdz\right)=\int_2^{-2} 2dx = 2x\Big|_2^{-2}=-8$$

**3.-** $\vec{F}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\vec{i}+\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\vec{j}$ **funtzio bektoriala emanik, kalkulatu** $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ **, non** $C\equiv xy\sin x+x^3+y^3=8$ **,** $A=(0,2)$ **eta** $B=(2,0)$ **puntuen artean (marrazkia ikusi).**




**(2 puntu)**

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C\left(\frac{x}{x^2+y^2}\cdot dx+\frac{y}{x^2+y^2}\cdot dy\right)$$

$C$ kurbaren adierazpena dela eta, ez da erraz parametrizatzen eta, beraz, integral honen ebazpena ez da erraza. Ikus dezagun ea bidearekiko independentea den:

$\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ eremuan, eta $X'_y=\frac{-2xy}{x^2+y^2}=Y'_x$ .

Baldintza hauek eremu sinpleki konexu batean beteko balira, integrala bidearekiko independentea dela frogatuko genuke. Beraz:

| |
|---|
| izan bedi $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x+y>0\}$ , eremu sinpleki konexua non aurreko baldintzak egiaztatzen diren (eremu hori aukeratzen dugu $A$, $B$ puntuak, eta, puntu hauek elkartzen dituen $C$ kurbaren zatia bertan egon daitezen). |

Eremu horretan, orduan, $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ bidearekiko independentea da. Beraz, *A*tik *B*ra doan eremu horretako edozein kurba aukera dezakegu. Adibidez:

- Marrazkian horiz marrazturiko zuzena: $y=2-x \quad 0\le x\le 2 \quad\Rightarrow\quad dy=-dx$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^2\left(\frac{x}{x^2+(2-x)^2}-\frac{2-x}{x^2+(2-x)^2}\right)dx=\int_0^2\frac{2x-2}{x^2+(2-x)^2}dx=\int_0^2\frac{2x-2}{2x^2-4x+4}dx$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{L}\left(2x^2-4x+4\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\mathrm{L}(4)-\frac{1}{2}\mathrm{L}(4)=0$$

- $\vec{F}$ -ren adierazpen analitikoa kontuan izanik, $x^2+y^2=4$ zirkunferentziaren arkua (gorriz marrazkian) egokiagoa izan daiteke:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C\left(\frac{x}{x^2+y^2}\cdot dx+\frac{y}{x^2+y^2}\cdot dy\right)=\frac{1}{4}\int_C(xdx+ydy)=\frac{1}{4}\int_0^2 xdx+\frac{1}{4}\int_2^0 ydy=0$$

**4.-** $S \equiv z = 4 - 2x^2 - 2y^2$, $z > 2$ **izanik, gainazal irekia emanik, kalkulatu** $\vec{F}(x,y,z) = \left(x^3y^2 + z^2,\ \sin x - x^2y^3,\ x^2\right)$ **eremu bektorialari dagokion fluxua,** ***S*** **gainazalaren kanpoko aurpegitik.**

**(2 puntu)**

$S$ gainazaletik irteten den $\vec{F}$-ren fluxua $= \iint_S \vec{F} d\vec{S} = \pm \iint_{R_{xy}} \left(\vec{F} \cdot \vec{N}\right) dxdy$

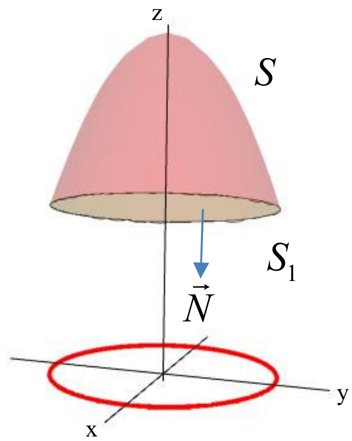
non $S \equiv z = 4 - 2x^2 - 2y^2 \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \leq 1$

$\vec{F}$-ren adierazpen analitikoa ikusita, integral hau ebaztea baino errazagoa den beste garapen bat saiatuko gara egiten.

Izan bedi $S_1 \equiv z = 2 \quad \forall (x,y) \in R_{xy}$.

Honela, $S' = S \cup S_1$ gainazal itxia definitzen dugu.

Horrez gain, $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak direnez, Gauss-en teorema erabil dezakegu:




$$\iint_{S'} \vec{F} d\vec{S} = \iint_S \vec{F} d\vec{S} + \iint_{S_1} \vec{F} d\vec{S} \overset{(GAUSS)}{=} \iiint_V div\left(\vec{F}\right) dxdydz \overset{(*)}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \iint_S \vec{F} d\vec{S} = -\iint_{S_1} \vec{F} d\vec{S}$$

**(*)** $div\left(\vec{F}\right) = 3x^2y^2 - 3x^2y^2 = 0$

Eta, orain, azken integral hau kalkulatuko odugu:

$$\iint_{S_1} \vec{F} d\vec{S} = \pm \iint_{R_{xy}} \left(\vec{F} \cdot \vec{N}\right) dxdy \overset{(**)}{=} -\iint_{R_{xy}} x^2 dxdy \overset{(***)}{=} -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3 \cos^2\theta \, d\rho \, d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{4} d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{8} d\theta = -\left(\frac{\theta}{8} + \frac{\sin(2\theta)}{16}\right)_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \iint_S \vec{F} d\vec{S} = \frac{\pi}{4}$$

(**) $\vec{N} = (0,0,1)$ non $\gamma > \dfrac{\pi}{2}$

(***) Polarretan: $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$